Verschoven Wienerprocessen en Radon-Nikodym afgeleiden

Monique Altorf

onder begeleiding van

Prof. dr. M.C.A. van Zuijlen

juni 2001

Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica
Katholieke Universiteit Nijmegen
Toernooiveld 1
6525 ED Nijmegen

Voorwoord

Dit is 'm dan, mijn afstudeerscriptie; het laatste onderdeel van mijn studie wiskunde. Maar zo'n scriptie schrijf je natuurlijk niet in je eentje. Daarom zijn er enkele mensen die ik graag wil bedanken voor hun steun tijdens mijn studie en het afstuderen. Zonder hen was het niet gelukt.
Om te beginnen mijn begeleider prof. dr. M.C.A. van Zuijlen voor zijn enthousiasme en de tijd die hij in mijn scriptie heeft gestoken.
Speciale dank ben ik daarnaast verschuldigd aan prof. dr. G. Pap van de Universiteit van Debrecen in Hongarije. Telkens wanneer hij te gast was in Nijmegen, was hij bereid tijd vrij te maken om mijn vragen te beantwoorden. Ook heeft hij me enkele keren per e-mail verder op weg geholpen.
Vervolgens wil ik Martijn bedanken. Hij zorgde ervoor, telkens als ik het even niet zag zitten, dat ik er weer in ging geloven. En als ik alles weer eens te serieus nam, gingen we 'iets leuks' doen. Met de OV-kaart hebben we zo een groot deel van het Nederlandse spoorwegennet bereisd. Bedankt Martijn. (Wel jammer van dat stukje Winschoten-Nieuweschans).
Ook wil ik mijn ouders bedanken, omdat nooit iets teveel moeite voor ze is. Zij hebben me laten inzien dat het belangrijk is om je studie af te maken en me vervolgens in staat gesteld om dat ook te doen. En mijn zus voor de gezelligheid als ik bij haar ben of zij bij mij.
Tenslotte bedank ik iedereen die ervoor gezorgd heeft dat ik voldoende ontspanning heb gehad naast mijn studie. Hoewel ik meestal krap bij kas zat, hebben jullie ervoor gezorgd dat ik toch overal aan mee kon doen. Bedankt voor jullie vriendschap.
Als laatste wil ik DESDA bedanken. DESDA is natuurlijk geen persoon, maar een mengeling van fijne mensen, leuke activiteiten, goede herinneringen en vooral veel gezelligheid in de DESDA-ruimte. Het zal vreemd zijn hier niet meer dagelijks te komen om gezellig te kletsen en te kaarten.

Inhoudsopgave

Inleiding

Het begrip Radon-Nikodym afgeleide speelt een belangrijke rol in deze scriptie. Een Radon-Nikodym afgeleide is een functie die een verband aangeeft tussen twee (kans)maten.
Na in hoofdstuk 1 de benodigde definities en stellingen te hebben behandeld, gaan we in hoofdstuk 2 kijken naar Wienerprocessen. Dit zijn stochastische processen op $[0, \infty)$ die bepaalde eigenschappen hebben. De realisaties van Wienerprocessen zijn continue functies.
Vervolgens beschouwen we processen van de vorm $Z(u) := W(u) + mg(u)$, waar W een Wienerproces is, g een bekende functie en m een onbekende parameter. We willen m schatten op basis van de uitkomst van Z. Een manier om dit te doen is de Radon-Nikodym afgeleide te bepalen en daarmee de meest aannemelijke schatter te vinden.
S. Baran, G. Pap en M. van Zuijlen bedachten een manier om deze Radon-Nikodym afgeleide te berekenen. Hierover is een rapport verschenen met de titel ESTIMATION OF THE MEAN OF STATIONARY AND NONSTATIONARY ORNSTEIN-UHLENBECK PROCESSES AND SHEETS [2].
Als reactie hierop kwam het idee dat het probleem wellicht ook op te lossen zou zijn met behulp van de theorie uit het boek STATISTICS OF RANDOM PROCESSES I, GENERAL THEORY van R.S. LIPTSER en A.N. SHIRYAYEV [3].
Dat dit inderdaad gelukt is, is te lezen in hoofdstuk 2.

Het hoofdonderwerp van het hierboven genoemde rapport is echter niet processen, maar sheets. Sheets zijn gedefinieerd op $\mathbb{R}^2_+$. Er worden sheets bekeken van de vorm $Z(u, v) := W(u, v) + mg(u, v)$, waar W een zogenoemd Wienersheet is, g een bekende functie en m weer een onbekende parameter. Ook hier berekenden de auteurs van het genoemde rapport de Radon-Nikodym afgeleide, met behulp van dezelfde methode.
De hoop was nu dat ook dit op een andere manier gedaan zou kunnen worden, bijvoorbeeld met behulp van een artikel van E. Wong en M. Zakai [4]. In hoofdstuk 3 is te lezen dat dit gelukt is voor speciale functies g.

Tenslotte is in de Appendix nog iets te lezen over meest aannemelijke schatters en martingalen.

1 Ter voorbereiding

In dit hoofdstuk behandelen we enkele definities en stellingen uit de maattheorie die we in deze scriptie nodig zullen hebben.

Zij S een verzameling en $\mathcal{A}$ een σ-algebra in S. Laat μ en ν maten op $\mathcal{A}$ zijn.

Als A een verzameling is die tot $\mathcal{A}$ behoort, dan noteren we dat met

$$A \sqsubseteq \mathcal{A}.$$

De verzameling der $\mathcal{A}$-meetbare functies van S naar $\overline{\mathbb{R}}^+$ noteren we met $\overline{\mathbb{R}}\mathcal{A}^+$.

Definitie 1.1 *Laat $h \in \overline{\mathbb{R}}\mathcal{A}^+$. Dan definieert de formule*

$$(h\mu)(A) := \int_A h d\mu, \qquad A \sqsubseteq \mathcal{A}$$

een maat $h\mu$ op $\mathcal{A}$. Er geldt:

$$\int f d(h\mu) = \int f h d\mu, \quad f \in \overline{\mathbb{R}}\mathcal{A}^+.$$

Een functie $h \in \overline{\mathbb{R}}\mathcal{A}^+$ met $\nu = h\mu$ heet een ***dichtheid van*** ν ***t.o.v.*** μ.

Definitie 1.2 *We noemen ν* ***absoluut continu*** t.o.v. μ *(notatie: $\nu \ll \mu$) als*

$$A \sqsubseteq \mathcal{A}, \quad \mu(A) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \nu(A) = 0.$$

Lemma 1.3 *Als ν een dichtheid heeft t.o.v. μ, dan is hij absoluut continu t.o.v. μ.*

Bewijs: Zie [1].

Definitie 1.4 *Twee maten μ en ν op $\mathcal{A}$ noemen we* **equivalent** *(notatie: $\mu \sim \nu$) als ze absoluut continu zijn t.o.v. elkaar.*

Nu definiëren we de term **bijna overal** (afgekort: b.o.) en bewijzen een belangrijke eigenschap van dichtheden.

Definitie 1.5 *Laat $f, g \in \overline{\mathbb{R}}\mathcal{A}^+$. Dan betekent $f = g \quad \mu$-**b.o.**:*
Als $\mathcal{C} = \{x \in S : f(x) \neq g(x)\}$, dan $\mu(\mathcal{C}) = 0$.

Lemma 1.6 *Laat μ (σ-)eindig en $f, g \in \overline{\mathbb{R}}\mathcal{A}^+$ zó dat $f\mu = g\mu$. Dan $f = g \quad \mu - b.o.$*

Bewijs: voor eindige μ. Laat $A := \{s \in S : g(s) \leq \alpha < \beta \leq f(s)\}$ waar $0 \leq \alpha < \beta < \infty$. Dan $A \in \mathcal{A}$, want $A = [g \leq \alpha] \cap [f \geq \beta]$.
Stel $\mu(A) > 0$. Dan

$$(g\mu)(A) = \int_A g d\mu \leq \int_A \alpha d\mu = \alpha\mu(A)$$

en

$$(f\mu)(A) = \int_A f d\mu \geq \int_A \beta d\mu = \beta\mu(A) > \alpha\mu(A).$$

Dus $(g\mu)(A) < (f\mu)(A)$ TEGENSPRAAK.
Dus $\mu(A) = 0$, waaruit volgt dat $f \leq g \quad \mu - b.o.$
Op dezelfde manier bewijzen we dat $g \leq f \quad \mu - b.o.$ □

Stelling 1.7 (Stelling van Radon en Nikodym) *Zij S een verzameling, $\mathcal{A}$ een σ-algebra in S en laat μ en ν (σ-)eindige maten op $\mathcal{A}$ zijn. Als ν absoluut continu is t.o.v. μ, dan heeft ν een dichtheid t.o.v. μ.*

Bewijs: Zie [1].

Deze dichtheid wordt de **Radon-Nikodym afgeleide** van ν t.o.v. μ genoemd, genoteerd als $\frac{d\nu}{d\mu}$.
Het omgekeerde van de stelling weten we al van lemma 1.3.

Opmerking: Uit lemma 1.6 volgt dat een dichtheid uniek is met uitzondering van verzamelingen met maat 0. Als we de Radon-Nikodym afgeleide berekenen zullen we echter steeds de toevoeging b.o. weglaten.

Tot slot nog één stelling:

Stelling 1.8 (Stelling van Fubini voor positieve functies) *Laat $(S_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ en $(S_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ σ-eindige maatruimten zijn. Zij f een $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$-meetbare functie $S_1 \times S_2 \to [0, \infty]$. Dan:*

$$\int_{S_1 \times S_2} f d(\mu_1 \times \mu_2) = \int_{S_2} \left(\int_{S_1} f(x,y) d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y) = \int_{S_1} \left(\int_{S_2} f(x,y) d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x),$$

waar $\mu_1 \times \mu_2$ de unieke maat op $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ is met
$(\mu_1 \times \mu_2)(X \times Y) = \mu_1(X)\mu_2(Y), \quad X \in \mathcal{A}_1, Y \in \mathcal{A}_2.$

Bewijs: Zie [1].

Opmerking: In deze scriptie werken we met kansmaten. Deze zijn per definitie eindig.

2 Verschoven Wienerprocessen en de bijbehorende Radon-Nikodym afgeleiden

2.1 Het Wienerproces

Zij $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ een kansruimte. Een $\mathcal{F}$-meetbare functie $X : \Omega \to \mathbb{R}$ noemen we een **stochastische variabele**, of kortweg een **stochast**.
Een **stochastisch proces** X is een collectie $\{X(t) : t \in T\}$ van stochastische variabelen die de uitkomstenruimte Ω afbeelden op een verzameling $S \subset \mathbb{R}$.
T is een indexverzameling.
Merk op: $X(t)$ is $\mathcal{F}$-meetbaar voor iedere t. Vaak is er echter sprake van een niet-dalende collectie sub-σ-algebra's $\{\mathcal{F}_t : t \in T\}$ zó dat $X(t)$ $\mathcal{F}_t$-meetbaar is voor elke t.

Voorbeeld: 'simple random walk'. Hier hebben we $T = \{0, 1, 2, \ldots\}$ en $S = \mathbb{Z}$. Dit proces springt bij iedere tijdstap één positie naar links of naar rechts. Het heeft twee belangrijke eigenschappen:

- **tijdhomogeniteit** Voor alle niet-negatieve m en n, hebben $X(m)$ en $X(m+n) - X(n)$ dezelfde verdeling. We nemen aan dat $X(0) = 0$.

- **onafhankelijkheid** De incrementen $X(n_i) - X(m_i), \quad i \geq 1$ zijn onafhankelijk zodra de intervallen $(m_i, n_i]$ disjunct zijn.

Ook voor $T = [0, \infty)$ en $S = \mathbb{R}$ hebben we een proces dat aan bovenstaande twee eigenschappen voldoet: het **Wienerproces**, $\{W(t) : t \in T\}$.
Het is een continu proces en iedere $W(t)$ is normaal verdeeld met verwachtingswaarde 0 en variantie $\sigma^2 t$ voor een positieve constante σ^2. Voor $t < s$ geldt $\mathbb{E}[W(t)W(s)] = \mathbb{E}[W(t)^2] = \sigma^2 t$.
De realisatie van een Wienerproces is een functie uit $C([0, \infty))$.
Het proces is voor te stellen als een model voor een deeltje dat random langs een lijn beweegt. Het wordt ook wel Brownse beweging genoemd.

We noemen een Wienerproces **standaard** als $\sigma^2 = 1$. In deze scriptie is dat steeds het geval.

2.2 Het verschoven Wienerproces

Als U een verzameling is, dan bedoelen we met $C(U)$ de verzameling der continue functies van U naar $\mathbb{R}$.

Definitie 2.1 *Een functie* $f : U \to \mathbb{R}^p$ *heet* ***absoluut continu*** *als hij continu is t.o.v. de Lebesguemaat.*

Voor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *komt dit neer op het volgende: voor elke* $\varepsilon > 0$ *is er een* $\delta > 0$ *zó dat*

$$\sum_{i=1}^{n}(\beta_i - \alpha_i) < \delta \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n}|f(\beta_i) - f(\alpha_i)| < \varepsilon$$

zodra $(\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_n, \beta_n)$ *disjuncte intervallen zijn.*
Een absoluut continue functie is continu en bijna overal differentieerbaar.

$\mathcal{L}^2(U)$ is de ruimte der meetbare functies $f : U \to \mathbb{R}$ waarvoor f^2 Lebesgue-integreerbaar is.

Zij W een Wienerproces. We bekijken W niet op $[0, \infty)$, maar op een interval $[a_1, a_2] \subset (0, \infty)$. Vervolgens beschouwen we processen van de vorm

$$Z(u) := W(u) + mg(u), \quad u \in [a_1, a_2],$$

waar g een absoluut continue functie is en m een onbekende parameter.
We willen m schatten op basis van de observatie $\{Z(u) : u \in [a_1, a_2]\}$, de realisatie van Z. Laat P_Z en P_W de maten zijn, gegenereerd op $C([a_1, a_2])$ door de processen Z en W, respectievelijk.

Een manier om m te schatten is de Radon-Nikodym afgeleide berekenen en vervolgens hieruit de meest aannemelijke schatter te bepalen. Dit is wat S. Baran, G. Pap en M. van Zuijlen gedaan hebben in hun rapport [2]. Ze bewezen de volgende stelling:

Stelling 2.2 *Als* g *absoluut continu is en* $g' \in \mathcal{L}^2([a_1, a_2])$*, dan zijn de maten* P_Z *en* P_W *equivalent en de Radon-Nikodym afgeleide van* P_Z *t.o.v.* P_W *is gelijk aan*

$$\frac{dP_Z}{dP_W}(Z) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(Am^2 - 2\zeta m\right)\right\},$$

waar

$$A = \frac{g^2(a_1)}{a_1} + \int_{a_1}^{a_2}[g'(u)]^2 du; \qquad \zeta = \frac{g(a_1)Z(a_1)}{a_1} + \int_{a_1}^{a_2} g'(u)dZ(u).$$

De meest aannemelijke schatter van m *gebaseerd op de observaties* $\{Z(u) : u \in [a_1, a_2]\}$ *heeft de vorm* $\tilde{m} = \zeta/A$ *en heeft een normale verdeling met verwachtingswaarde* m *en variantie* $1/A$.

Bewijs: Hiernaast geven we alleen een korte schets van het bewijs. Voor het volledige bewijs zie [2].

Beschouw partities $a_1 = u_1^{(M)} < u_2^{(M)} < \cdots < u_M^{(M)} = a_2, \quad M \in \mathbb{N}$ en bekijk de discrete steekproef $\{Z(u_i^{(M)}) : i = 1, \ldots, M\}$. Voor de Radon-Nikodym afgeleide geldt dan

$$\frac{dP_Z^{(M)}}{dP_W^{(M)}}(Z(u_1^{(M)}), \ldots, Z(u_M^{(M)})) = \exp\left\{-\frac{1}{2}(A_M m^2 - 2\zeta_M m)\right\},$$

waar

$$A_M = \frac{g^2(u_1^{(M)})}{u_1^{(M)}} + \sum_{i=2}^{M} \frac{\left(g(u_i^{(M)}) - g(u_{i-1}^{(M)})\right)^2}{u_i^{(M)} - u_{i-1}^{(M)}};$$

$$\zeta_M = \frac{g(u_1^{(M)})Z(u_1^{(M)})}{u_1^{(M)}} + \sum_{i=2}^{M} \frac{\left(g(u_i^{(M)}) - g(u_{i-1}^{(M)})\right)\left(Z(u_i^{(M)}) - Z(u_{i-1}^{(M)})\right)}{u_i^{(M)} - u_{i-1}^{(M)}}.$$

Vervolgens wordt bewezen dat als $M \to \infty$ en $\max_{2 \le i \le M}(u_i^{(M)} - u_{i-1}^{(M)}) \to 0$ dat $A_M \to A$ en $\zeta_M \to \zeta$ in L^2-zin.

Hieruit volgt dat

$$\frac{dP_Z^{(M)}}{dP_W^{(M)}}(Z(u_1^{(M)}), \ldots, Z(u_M^{(M)})) \xrightarrow{\mathcal{P}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(Am^2 - 2\zeta m)\right\}.$$

□

Wat we nu verder gaan doen, is proberen deze stelling nogmaals te bewijzen. Maar dan met behulp van de theorie uit het boek STATISTICS OF RANDOM PROCESSES I, GENERAL THEORY van R.S. LIPTSER en A.N. SHIRYAYEV [3].
In dit boek wordt een uitdrukking gevonden voor de Radon-Nikodym afgeleide voor processen W en Z op een interval $[0, T]$. Hierbij wordt gebruik gemaakt van het feit dat $W(0) = 0$ en er wordt aangenomen dat $Z(0) = 0$. Wij werken op een interval $[a_1, a_2] \subset (0, \infty)$, maar nemen niet aan dat $Z(a_1) = 0$. Bovendien geldt in het algemeen niet dat $W(a_1) = 0$.

2.3 Liptser en Shiryayev

Voor sommige stochasten is de Radon-Nikodym afgeleide niet moeilijk te berekenen. Het is het quotiënt van de kansdichtheidsfuncties.

Lemma 2.3 *Laat X en Y continu*[1] *verdeelde stochasten met waarden in $\mathbb{R}$ en met kansdichtheidsfuncties f_X en f_Y, respectievelijk. Neem aan $f_X > 0$ en continu. Dan $P_Y \ll P_X$ en voor de Radon-Nikodym afgeleide geldt:*

$$\frac{dP_Y}{dP_X} = \frac{f_Y}{f_X}.$$

Bewijs: Er geldt: $P_X = f_X\lambda$ en $P_Y = f_Y\lambda$. $\mathcal{B}$ is de Borel-σ-algebra van $\mathbb{R}$. Laat $B \in \mathcal{B}$ zó dat $P_X(B) = 0$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad (f_X\lambda)(B) = 0 \\ &\Rightarrow \quad \textstyle\int_B f_X d\lambda = 0 \\ &\Rightarrow \quad \lambda(B) = 0 \\ &\Rightarrow \quad P_Y(B) = 0 \quad \text{(Lemma 1.3)}. \end{aligned}$$

Dus $P_Y \ll P_X$. Verder geldt voor $B \in \mathcal{B}$:

$$\begin{aligned} P_Y(B) &= \int_B f_Y d\lambda = \int_B \left(\frac{f_Y}{f_X} f_X\right) d\lambda = \int_B \frac{f_Y}{f_X} d(f_X\lambda) \\ &= \int_B \frac{f_Y}{f_X} dP_X = \left(\frac{f_Y}{f_X} P_X\right)(B) \end{aligned}$$

Dus de Radon-Nikodym afgeleide van P_Y t.o.v. P_X is $\frac{f_Y}{f_X}$. □

Voor stochastische processen gaat dit echter niet zo eenvoudig. Een proces heeft niet zo iets als een kansdichtheidsfunctie.
Voor bepaalde zogenoemde Ito-processen weten we echter wel wat de Radon-Nikodym afgeleide is. Dit wordt beschreven in het boek van Liptser en Shiryayev [3].

Allereerst wat terminologie zoals die in dit boek gebruikt wordt.
Er wordt gewerkt op een complete kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$. Zij $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ een niet-dalende collectie sub-σ-algebra's. Dit betekent $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ voor $s \leq t$ en iedere $\mathcal{F}_t$ is zelf een σ-algebra.

Als een stochastisch proces ξ wordt genoteerd als $\xi = \{\xi(t), \mathcal{F}_t : t \geq 0\}$, dan betekent dit dat de stochasten $\xi(t)$ $\mathcal{F}_t$-meetbaar zijn voor alle $t \geq 0$. Oftewel $\xi(t)^{-1}(B) \in \mathcal{F}_t$ voor alle $B \in \mathcal{B}$.

Verder nog twee notaties:

[1] Continu betekent hier dat de maten P_X en P_Y absoluut continu zijn t.o.v. de Lebesguemaat.

- $\xi_0^t = \{\xi(s) : 0 \leq s \leq t\}$;
- $\mathcal{F}_t^\xi = \sigma\{\xi(s) : 0 \leq s \leq t\}$, de σ-algebra voortgebracht door ξ_0^t.

Definitie 2.4 *Een stochast heet Gaussisch verdeeld als deze normaal verdeeld is of constant.*
Een proces $\{X(t) : 0 \leq t \leq T\}$ heet ***Gaussisch*** *als voor ieder $n \in \mathbb{N}$ en $0 \leq t_1 < \ldots < t_n \leq T$ en $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ geldt dat $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X(t_i)$ Gaussisch verdeeld is.*

Eerst geven we de precieze definitie van een Wienerproces.

Definitie 2.5 *Een stochastisch proces $W = \{W(t), \mathcal{F}_t : t \geq 0\}$ noemen we een* ***Wienerproces*** *(met betrekking tot $\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$) als:*

1. *De trajecten $W(t), \quad t \geq 0$ ($\mathcal{P} - b.o.$) continu zijn over t;*
2. *$\{W(t), \mathcal{F}_t : t \geq 0\}$ een kwadratisch integreerbare martingaal is en W Gaussisch is met $W(0) = 0$ en $\mathbb{E}[(W(t) - W(s))^2 | \mathcal{F}_s] = t - s, \quad t \geq s \geq 0$.*

$\mathcal{P} - b.o.$ betekent: voor bijna alle $\omega \in \Omega$.
Voor de definitie van martingaal zie de appendix.

Definitie 2.6 *Een continu stochastisch proces $\xi = \{\xi(t), \mathcal{F}_t : 0 \leq t \leq T\}$ is een* ***Ito-proces*** *(met betrekking tot het Wienerproces $W = \{W(t), \mathcal{F}_t : 0 \leq t \leq T\}$), als er twee stochastische processen $a = \{a(t), \mathcal{F}_t : 0 \leq t \leq T\}$ en $b = \{b(t), \mathcal{F}_t : 0 \leq t \leq T\}$ zijn zó dat*

$$\mathcal{P}\left(\int_0^T |a(t)| dt < \infty\right) = \mathcal{P}\left(\int_0^T b(t)^2 dt < \infty\right) = 1$$

en als met met kans 1 voor $0 \leq t \leq T$ geldt dat

$$\xi(t) = \xi(0) + \int_0^t a(s) ds + \int_0^t b(s) dW(s).$$

Ter afkorting zeggen we dat het proces ξ voldoet aan de stochastische differentiaalvergelijking:

$$d\xi(t) = a(t)dt + b(t)dW(t).$$

We beschouwen de Ito-processen processen $\xi = \{\xi(t), \mathcal{F}_t : 0 \leq t \leq T\}$, met de differentiaal

$$d\xi(t) = \beta(t)dt + dW(t), \quad \xi(0) = 0,$$

onder aanname dat het proces $\beta = \{\beta(t), \mathcal{F}_t : 0 \leq t \leq T\}$ Gaussisch is.

Met $(C_T, \mathcal{B}_T)$ noteren we een meetbare ruimte van continue functies $x = (x(s))$, $0 \leq s \leq T$, waarvoor $x(0) = 0$. Laat P_ξ en P_W de maten op $(C_T, \mathcal{B}_T)$ zijn, gegenereerd door de processen ξ en W:

$$P_\xi(B) = \mathcal{P}\{\omega : \xi \in B\}, \quad P_W(B) = \mathcal{P}\{\omega : W \in B\}, \quad B \in \mathcal{B}_T.$$

Dan zijn er twee stellingen die zeggen wat de Radon-Nikodym afgeleide van P_ξ t.o.v. van P_W is. Bij de eerste nemen we aan dat β continu is; bij de tweede stelling laten we deze eis vallen.

Stelling 2.7 *Zij ξ als hierboven en $\beta = \{\beta(t), \mathcal{F}_t : 0 \leq t \leq T\}$ een continu Gaussisch proces. Dan $P_\xi \sim P_W$ en*

$$\mathcal{P}\left(\int_0^T \alpha(t,\xi)^2 dt < \infty\right) = \mathcal{P}\left(\int_0^T \alpha(t,W)^2 dt < \infty\right) = 1,$$

$$\frac{dP_\xi}{dP_W}(W) = \exp\left(\int_0^T \alpha(s,W)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^T \alpha(s,W)^2 ds\right),$$

$$\frac{dP_W}{dP_\xi}(\xi) = \exp\left(-\int_0^T \alpha(s,\xi)d\xi(s) + \frac{1}{2}\int_0^T \alpha(s,\xi)^2 ds\right),$$

waar de functionaal $\alpha = \{\alpha(t,x), \mathcal{B}_t\}$[2] ($\mathcal{P}$-b.o.) voldoet aan $\alpha(t,\xi) = \mathbb{E}\left[\beta(t)|\mathcal{F}_t^\xi\right]$ voor bijna alle t, $0 \leq t \leq T$.

Bewijs: Zie [3].

Stelling 2.8 [3] *Zij ξ als hierboven en $\beta = \{\beta(t), \mathcal{F}_t : 0 \leq t \leq T\}$ een Gaussisch proces met*

$$\mathcal{P}\left(\int_0^T \beta(t)^2 dt < \infty\right) = 1.$$

Dan $P_\xi \ll P_W$ en

$$\frac{dP_\xi}{dP_W}(\xi) = \exp\left(\int_0^T \alpha(s,\xi)d\xi(s) - \frac{1}{2}\int_0^T \alpha(s,\xi)^2 ds\right),$$

waar de functionaal $\alpha = \{\alpha(t,x), \mathcal{B}_t\}$[2] ($\mathcal{P}$-b.o.) voldoet aan $\alpha(t,\xi) = \mathbb{E}\left[\beta(t)|\mathcal{F}_t^\xi\right]$ voor bijna alle t, $0 \leq t \leq T$.

Bewijs: Zie [3].

[2] $\mathcal{B}_t = \sigma\{x(s) : 0 \leq s \leq t\}$, de σ-algebra voortgebracht door de verzameling $\{x(s) : 0 \leq s \leq t\}$.
[3] Dit is een vereenvoudigde versie van de stelling uit het boek [3].

2.4 Twee Radon-Nikodym afgeleiden

We gaan nu proberen stelling 2.8 uit de vorige paragraaf toe te passen op het proces $Z(u) := W(u) + mg(u), \quad u \in [a_1, a_2]$.
Z is een Itoproces, want het voldoet aan de volgende differentiaalvergelijking:

$$dZ(u) = mg'(u)du + dW(u).$$

Om $\frac{dP_Z}{dP_W}$ direct te kunnen bepalen met behulp van stelling 2.8 zou moeten gelden dat $W(a_1) = Z(a_1) = 0$. Dit is echter in het algemeen niet het geval.

Wat we wel kunnen berekenen is $\frac{dP_{Z(a_1)}}{dP_{W(a_1)}}$ en $\frac{dP_{Z-Z(a_1)}}{dP_{W-W(a_1)}}$. In de volgende paragraaf zal blijken dat dit voldoende is.

We zullen beginnen met $\frac{dP_{Z(a_1)}}{dP_{W(a_1)}}$.

We weten $W(a_1) \sim \mathcal{N}(0, a_1)$. Dus $Z(a_1) \sim \mathcal{N}(mg(a_1), a_1)$.
Uit lemma 2.3 volgt dat $P_{Z(a_1)}$ en $P_{W(a_1)}$ equivalent zijn en

$$\frac{dP_{Z(a_1)}}{dP_{W(a_1)}}(x) = \frac{f_{Z(a_1)}}{f_{W(a_1)}}(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi a_1}} \exp\{-\frac{(x-mg(a_1))^2}{2a_1}\}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi a_1}} \exp\{-\frac{x^2}{2a_1}\}} = \exp\left\{\frac{2mg(a_1)x - m^2g^2(a_1)}{2a_1}\right\}.$$

Om $\frac{dP_{Z-Z(a_1)}}{dP_{W-W(a_1)}}$ te berekenen kunnen we stelling 2.8 toepassen op het proces $Z - Z(a_1)$. Dit proces heeft namelijk wel een nul-start in a_1 (net als $W - W(a_1)$) en er geldt:

$$\begin{aligned} d(Z(u) - Z(a_1)) &= dZ(u) - dZ(a_1) \\ &= dZ(u) \\ &= mg'(u)du + dW(u) \\ &= mg'(u)du + d(W(u) - W(a_1)). \end{aligned}$$

Het Gaussisch proces β uit stelling 2.8 is hier de $\mathcal{L}^2$-functie mg', dus

$$\int_{a_1}^{a_2} \beta(u)^2 du = \int_{a_1}^{a_2} [mg'(u)]^2 du < \infty.$$

Omdat mg' een niet-stochastische functie is, hangt de verwachtingswaarde niet van Z af, oftewel

$$\alpha(u, Z - Z(a_1)) = \mathbb{E}[mg'(u)|\mathcal{F}_u^{Z-Z(a_1)}] = mg'(u).$$

Dan zegt de stelling: $P_{Z-Z(a_1)} \ll P_{W-W(a_1)}$ en

$$\begin{aligned} \frac{dP_{Z-Z(a_1)}}{dP_{W-W(a_1)}}(Z - Z(a_1)) &= \exp\left\{\int_{a_1}^{a_2} mg'(t)d(Z(t) - Z(a_1)) - \frac{1}{2}\int_{a_1}^{a_2} m^2[g'(t)]^2dt\right\} \\ &= \exp\left\{\int_{a_1}^{a_2} mg'(t)dZ(t) - \frac{1}{2}\int_{a_1}^{a_2} m^2[g'(t)]^2dt\right\}. \end{aligned}$$

Als g' continu is, dan zijn $P_{Z-Z(a_1)}$ en $P_{W-W(a_1)}$ equivalent.

2.5 De Radon-Nikodym afgeleide van P_Z t.o.v. P_W

Voordat we tenslotte de stelling opnieuw kunnen bewijzen met behulp van de uitkomsten uit de vorige paragraaf, moet er nog wat werk gedaan worden.
We zullen gebruik maken van het feit dat de ruimte $C([a_1, a_2])$ isomorf is met de ruimte $\mathbb{R} \times C_0([a_1, a_2])$, waar $C_0([a_1, a_2]) = \{f \in C([a_1, a_2]) : f(a_1) = 0\}$.

Lemma 2.9 *Zij X en Y stochastische processen met waarden in S en F een bijectie $S \to F(S)$. Als $P_X \ll P_Y$, dan $P_{F(X)} \ll P_{F(Y)}$.*

Bewijs: Zij $\mathcal{A}$ een σ-algebra in $F(S)$ en $A \sqsubseteq \mathcal{A}$ zó dat $P_{F(Y)}(A) = 0$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad P_Y(F^{-1}(A)) = P_{F(Y)}(A) = 0 \\ &\Rightarrow \quad P_X(F^{-1}(A)) = 0 \\ &\Rightarrow \quad P_{F(X)}(A) = 0. \end{aligned}$$

$\square$

De stelling van Radon en Nikodym zegt nu dat $\frac{dP_{F(X)}}{dP_{F(Y)}}$ bestaat en het verband met $\frac{dP_X}{dP_Y}$ volgt uit:

Stelling 2.10 *Zij X en Y stochastische processen met waarden in S en F een bijectie $S \to F(S)$. Als $P_X \ll P_Y$, dan voor $s \in S$:*

$$\frac{dP_X}{dP_Y}(s) = \frac{dP_{F(X)}}{dP_{F(Y)}}(F(s)).$$

Bewijs: Laat $h := \frac{dP_{F(X)}}{dP_{F(Y)}}$.

Te bewijzen: $\frac{dP_X}{dP_Y} = h \circ F$.

Zij $\mathcal{A}$ een σ-algebra in $F(S)$.
Er geldt: $P_{F(Y)}(A) = P_Y(F^{-1}(A)), \quad A \sqsubseteq \mathcal{A}$,
dus:

$$P_{F(X)}(A) = \int_A h dP_{F(Y)} = \int_{F^{-1}(A)} (h \circ F) dP_Y.$$

Ook:

$$P_{F(X)}(A) = P_X(F^{-1}(A)) = \int_{F^{-1}(A)} \frac{dP_X}{dP_Y} dP_Y.$$

Dus $\frac{dP_X}{dP_Y} = h \circ F$. $\square$

Stochastische vectoren hebben de volgende welbekende eigenschap. Laat $X = (X_1, X_2)$ een stochastische vector met waarden in $S_1 \times S_2$. Als X_1 en X_2 onafhankelijk zijn, dan is de dichtheidsfunctie van X gelijk aan het product van de dichtheden van X_1 en X_2 (als deze bestaan). Als $Y = (Y_1, Y_2)$ een stochastische vector is met onafhankelijke coördinaten en $f_{Y_1}, f_{Y_2} > 0$, dan volgt uit lemma 2.3 voor de Radon-Nikodym afgeleide:

$$\frac{dP_{(X_1,X_2)}}{dP_{(Y_1,Y_2)}}(s_1, s_2) = \frac{dP_{X_1}}{dP_{Y_1}}(s_1)\frac{dP_{X_2}}{dP_{Y_2}}(s_2), \quad (s_1, s_2) \in S_1 \times S_2.$$

Dit laatste geldt echter ook voor processen.

Lemma 2.11 *Zij $X = (X_1, X_2)$ en $Y = (Y_1, Y_2)$ stochastische processen met waarden in $S_1 \times S_2$.*
Neem aan $X_1 \perp X_2$ en $Y_1 \perp Y_2$ en bovendien $P_{X_1} \ll P_{Y_1}$ en $P_{X_2} \ll P_{Y_2}$. Dan $P_{(X_1,X_2)} \ll P_{(Y_1,Y_2)}$.

Bewijs: Zij $\mathcal{A}_1$ en $\mathcal{A}_2$ σ-algebra's in S_1 en S_2, respectievelijk. Dan is $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ de σ-algebra in $S_1 \times S_2$ voortgebracht door de verzameling $\mathcal{R}$ van alle verzamelingen $X \times Y$ waar $X \sqsubseteq \mathcal{A}_1$ en $Y \sqsubseteq \mathcal{A}_2$.
Zij nu $A_1 \times A_2 \sqsubseteq \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ zó dat $P_{(Y_1,Y_2)}(A_1 \times A_2) = 0$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad P_{Y_1}(A_1)P_{Y_2}(A_2) = 0 \\
&\Rightarrow \quad P_{Y_1}(A_1) = 0 \quad \text{of} \quad P_{Y_2}(A_2) = 0 \\
&\Rightarrow \quad P_{X_1}(A_1) = 0 \quad \text{of} \quad P_{X_2}(A_2) = 0 \\
&\Rightarrow \quad P_{(X_1,X_2)}(A_1 \times A_2) = 0.
\end{aligned}$$

Dus $P_{(X_1,X_2)} \ll P_{(Y_1,Y_2)}$. $\square$

Stelling 2.12 *Zij X en Y als in lemma 2.11. Dan*

$$\frac{dP_{(X_1,X_2)}}{dP_{(Y_1,Y_2)}}(s_1, s_2) = \frac{dP_{X_1}}{dP_{Y_1}}(s_1)\frac{dP_{X_2}}{dP_{Y_2}}(s_2), \quad (s_1, s_2) \in S_1 \times S_2.$$

Bewijs: Uit lemma 2.11 en de stelling van Radon en Nikodym volgt dat het linkerlid bestaat.

Laat $H_1 := \frac{dP_{X_1}}{dP_{Y_1}}$ en $H_2 := \frac{dP_{X_2}}{dP_{Y_2}}$.
Definieer $G : S_1 \times S_2 \to \overline{\mathbb{R}}^+$ door

$$G : (s_1, s_2) \mapsto H_1(s_1)H_2(s_2).$$

Te bewijzen: $\frac{dP_{(X_1,X_2)}}{dP_{(Y_1,Y_2)}} = G$.

Er geldt:

$$P_{(X_1,X_2)}(A_1 \times A_2) = \int_{A_1 \times A_2} \frac{dP_{(X_1,X_2)}}{dP_{(Y_1,Y_2)}}(x,y) dP_{(Y_1,Y_2)}(x,y), \qquad A_1 \times A_2 \sqsubseteq \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2.$$

Verder hebben we voor $A_1 \times A_2 \sqsubseteq \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$:

$$\begin{aligned}
P_{(X_1,X_2)}(A_1 \times A_2) &= P_{X_1}(A_1) P_{X_2}(A_2) \\
&= \left(\int_{A_1} H_1(x) dP_{Y_1}(x) \right) \left(\int_{A_2} H_2(y) dP_{Y_2}(y) \right) \\
&= \int_{A_2} \left(\int_{A_1} H_1(x) dP_{Y_1}(x) \right) H_2(y) dP_{Y_2}(y) \\
&= \int_{A_2} \left(\int_{A_1} H_1(x) H_2(y) dP_{Y_1}(x) \right) dP_{Y_2}(y) \\
\text{(Fubini)} \quad &= \int_{A_1 \times A_2} H_1(x) H_2(y) dP_{(Y_1,Y_2)}(x,y) \\
&= \int_{A_1 \times A_2} G(x,y) dP_{(Y_1,Y_2)}(x,y).
\end{aligned}$$

Dus $\frac{dP_{(X_1,X_2)}}{dP_{(Y_1,Y_2)}} = G$. □

Dat de Radon-Nikodym afgeleide $\frac{dP_Z}{dP_W}$ bestaat, volgt uit:

Lemma 2.13 *Zij Z en W als in paragraaf 2.2. Dan $P_Z \ll P_W$.*
Als g bovendien continu differentieerbaar is, dan zijn P_Z en P_W equivalent.

Bewijs: Z en W hebben waarden in $C([a_1, a_2])$. We construeren een σ-algebra $\mathcal{B}_{C([a_1,a_2])}$ zó dat $(C([a_1, a_2]), \mathcal{B}_{C([a_1,a_2])})$ een meetbare ruimte is.
We kijken naar deelverzamelingen van $C([a_1, a_2])$ van de vorm

$$A = \{f : (f(t_1), \dots, f(t_n)) \in B_n\}$$

met $a_1 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq a_2$ en B_n een n-dimensionale Borelverzameling.
Nu variëren we n, de punten $t_1, \dots, t_n$ en de Borelverzameling B_n. Dan krijgen we een collectie $\mathcal{U}$ van deelverzamelingen van $C([a_1, a_2])$; $\mathcal{U}$ is een algebra. Laat nu $\mathcal{B}_{C([a_1,a_2])}$ de kleinste σ-algebra die $\mathcal{U}$ omvat. Dan is $(C([a_1, a_2]), \mathcal{B}_{C([a_1,a_2])})$ een meetbare ruimte.
Voor P_W geldt dan $\mathcal{P}[(W(t_1), \dots, W(t_n)) \in B_n] = P_W(A)$, met A als hierboven.

Overigens is P_W hierin uniek. Zie bijvoorbeeld [6].

$\mathcal{B}_{C([a_1,a_2])}$ wordt voortgebracht door $\mathcal{U}$. Het is daarom voldoende te bewijzen dat voor elke $A \sqsubseteq \mathcal{U}$ geldt:

$$P_W(A) = 0 \quad \Longrightarrow \quad P_Z(A) = 0.$$

Laat $C_0([a_1,a_2]) := \{f \in C([a_1,a_2]) : f(a_1) = 0\}$ en maak bij iedere A een verzameling A_0 door

$$A_0 := \{f - f(a_1) : f \in A\}.$$

Voor $f \in C([a_1,a_2])$ geldt: $f \in A \Leftrightarrow f - f(a_1) \in A_0$, dus

$$P_W(A) = P_{W-W(a_1)}(A_0).$$

Laat $A \sqsubseteq \mathcal{U}$ zó dat $P_W(A) = 0$

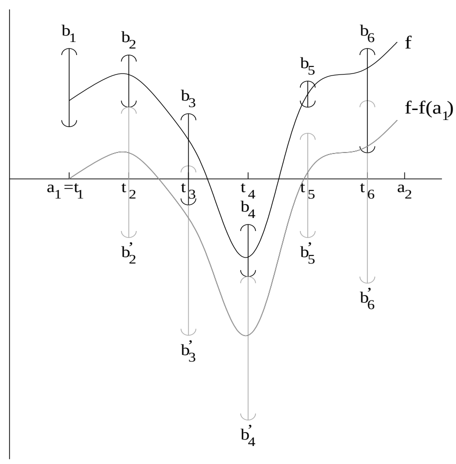
$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad P_{W-W(a_1)}(A_0) = 0 \\ &\Rightarrow \quad P_{Z-Z(a_1)}(A_0) = 0 \\ &\Rightarrow \quad P_Z(A) = 0. \end{aligned}$$

Dus $P_Z \ll P_W$.

Als g' continu is, dan ook $P_{W-W(a_1)} \ll P_{Z-Z(a_1)}$ en bewijzen we op dezelfde manier dat $P_W \ll P_Z$.

$\square$

Ter illustratie een plaatje:



Laat $a_1 = t_1 < t_2 < \ldots < t_6 \leq a_2$ en $b_1, \ldots, b_6$ intervallen in $\mathbb{R}$, zeg $b_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, \ldots, 6$.

We nemen hier aan dat $t_1 = a_1$, omdat we anders geen plaatje kunnen tekenen.
Voor $i = 2, \ldots, 6$ maken we bij b_i een nieuwe interval b_i' in $\mathbb{R}$ door
$b_i' = (x_i - y_1, y_i - x_1)$.
Dan $A_0 = \{f - f(a_1) : f \in A\} = \{g : (g(t_1), g(t_2), \ldots, g(t_6)) \in B_6'\}$,
waar $B_6' := \{0\} \times b_2' \times b_3' \times b_4' \times b_5' \times b_6'$.

Nu hebben we alles wat we nodig hebben om stelling 2.2 opnieuw te bewijzen.

Stelling 2.14 *Als g absoluut continu is en $g' \in \mathcal{L}^2([a_1, a_2])$, dan $P_Z \ll P_W$ en de Radon-Nikodym afgeleide van P_Z t.o.v. P_W is gelijk aan*

$$\frac{dP_Z}{dP_W}(Z) = \exp\Big\{ -\frac{1}{2}(Am^2 - 2\zeta m)\Big\},$$

waar

$$A = \frac{g^2(a_1)}{a_1} + \int_{a_1}^{a_2} [g'(u)]^2 du; \qquad \zeta = \frac{g(a_1)Z(a_1)}{a_1} + \int_{a_1}^{a_2} g'(u) dZ(u).$$

Als g bovendien continu differentieerbaar is, dan zijn P_Z en P_W equivalent.

Bewijs: Uit het voorgaande lemma en de stelling van Radon en Nikodym volgt dat $\frac{dP_Z}{dP_W}$ bestaat.
We passen stelling 2.10 toe op de processen Z en W met de bijectie
$F : C([a_1, a_2]) \to \mathbb{R} \times C_0([a_1, a_2])$ gedefinieerd door:

$$F : f \mapsto (f(a_1), f - f(a_1)).$$

Dan voor $f \in C([a_1, a_2])$:

$$\frac{dP_Z}{dP_W}(f) = \frac{dP_{F(Z)}}{dP_{F(W)}}(F(f)) = \frac{dP_{(Z(a_1), Z - Z(a_1))}}{dP_{(W(a_1), W - W(a_1))}}(f(a_1), f - f(a_1)).$$

Beschouw de processen $(W(a_1), W - W(a_1))$ en $(Z(a_1), Z - Z(a_1))$. Wienerprocessen hebben onafhankelijke incrementen, dus $W(a_1) \perp W - W(a_1)$. Daaruit volgt dat ook $Z(a_1) \perp Z - Z(a_1)$.
We wisten al dat $P_{Z(a_1)} \ll P_{W(a_1)}$ en $P_{Z - Z(a_1)} \ll P_{W - W(a_1)}$. Dan volgt uit stelling 2.12 dat voor $f \in \mathcal{C}([a_1, a_2])$:

$$\frac{dP_{(Z(a_1), Z - Z(a_1))}}{dP_{(W(a_1), W - W(a_1))}}(f(a_1), f - f(a_1)) = \frac{dP_{Z(a_1)}}{dP_{W(a_1)}}(f(a_1)) \cdot \frac{dP_{Z - Z(a_1)}}{dP_{W - W(a_1)}}(f - f(a_1)).$$

Het proces Z heeft waarden in $C([a_1, a_2])$, dus

$$\frac{dP_Z}{dP_W}(Z) \quad = \quad \frac{dP_{Z(a_1)}}{dP_{W(a_1)}}(Z(a_1)) \cdot \frac{dP_{Z - Z(a_1)}}{dP_{W - W(a_1)}}(Z - Z(a_1))$$

$$
\begin{aligned}
&= \exp\left\{\frac{2mg(a_1)Z(a_1) - m^2 g^2(a_1)}{2a_1}\right\} \exp\left\{\int_{a_1}^{a_2} mg'(t)dZ(t) - \frac{1}{2}\int_{a_1}^{a_2} m^2[g'(t)]^2 dt\right\} \\
&= \exp\left\{-\frac{1}{2}m^2\left(\frac{g^2(a_1)}{a_1} + \int_{a_1}^{a_2}[g'(t)]^2 dt\right) + m\left(\frac{g(a_1)Z(a_1)}{a_1} + \int_{a_1}^{a_2} g'(t)dZ(t)\right)\right\} \\
&= \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(Am^2 - 2\zeta m\right)\right\}.
\end{aligned}
$$

□

3 Verschoven Wienersheets en de bijbehorende Radon-Nikodym afgeleiden

In dit hoofdstuk gaan we kijken naar het tweedimensionale geval, de zogenoemde Wienersheets. In het eerder genoemde rapport [2] wordt ook de Radon-Nikodym afgeleide voor dit geval berekend. Dit wordt op dezelfde manier gedaan als in het ééndimensionale geval. De vraag was nu of ook dit op een andere manier zou kunnen. Een artikel van E. Wong en M. Zakai [4] bracht een oplossing in bepaalde gevallen.

3.1 Wienersheets

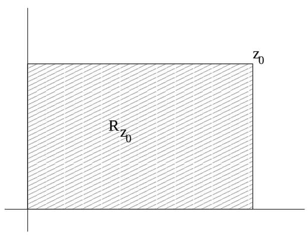
We beginnen met een aantal notaties. We werken hier op $\mathbb{R}_+^2$.
Voor twee punten $a = (a_1, a_2)$ en $b = (b_1, b_2)$ in $\mathbb{R}_+^2$ noteren we:

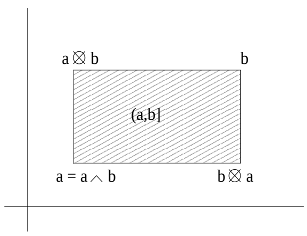
$$\begin{aligned} a \preceq b &\quad \text{als } a_1 \leq b_1 \text{ en } a_2 \leq b_2; \\ a \prec b &\quad \text{als } a_1 < b_1 \text{ en } a_2 < b_2. \end{aligned}$$

Verder hebben we nog:

$$\begin{aligned} a \otimes b &= (a_1, b_2) \\ a \wedge b &= (\min(a_1, b_1), \min(a_2, b_2)) \\ a \vee b &= (\max(a_1, b_1), \max(a_2, b_2)) \end{aligned}$$

Voor een vast punt z_0 in $\mathbb{R}_+^2$ definiëren we $R_{z_0} := \{z \in \mathbb{R}_+^2 : z \preceq z_0\}$.
En voor $b \succ a$ hebben we de rechthoek $(a, b] := \{z : a \prec z \preceq b\}$.





Laat $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ een kansruimte en laat $\{\mathcal{F}_z : z \in R_{z_0}\}$ een collectie van sub-σ-algebra's zo dat
F1) $z' \succeq z \Rightarrow \mathcal{F}_{z'} \supset \mathcal{F}_z$,
F2) $\mathcal{F}_0$ bevat alle nulverzamelingen van $\mathcal{F}$, waar 0 de oorsprong aanduidt,
F3) $\mathcal{F}_z = \bigcap_{z' \succ z} \mathcal{F}_{z'}$ voor alle z,
F4) $\mathcal{F}_{z \otimes z_0}$ en $\mathcal{F}_{z_0 \otimes z}$ zijn onafhankelijk gegeven $\mathcal{F}_z$.

Definitie 3.1 *Een sheet* $W = \{W(z), \mathcal{F}_z : z \in R_{z_0}\}$ *is een* ***Wienersheet*** *als het een sterke martingaal is en als* W *Gaussisch is met* $\mathbb{E}W(z) = 0$ *en* $\mathbb{E}W(z)W(z') = Opp(R_{z \wedge z'})$.

Voor $(s,t) \in R_{z_0}$ geldt dus:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[W(s,t)] &= 0; \\ Var[W(s,t)] &= \mathbb{E}[W(s,t)^2] = \mathrm{Opp}(R_{(s,t)}) = st. \end{aligned}$$

Dus $W(s,t) \sim \mathcal{N}(0, st)$.

De uitkomst van een Wienersheet is een functie uit $C(R_{z_0})$.

Voor de definitie van (sterke) martingaal zie de appendix.

3.2 Verschoven Wienersheets

Laat $[a_1, a_2], [b_1, b_2] \subset (0, \infty)$. En beschouw voor $(s,t) \in [a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$ de sheet

$$Z(s,t) := W(s,t) + mg(s,t),$$

waar g een absoluut continue functie $[a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \to \mathbb{R}$ is en W een Wienersheet.
m is weer de onbekende parameter die we willen schatten m.b.v. de meest aannemelijke schatter gebaseerd op de observaties $\{Z(s,t) : s \in [a_1, a_2], t \in [b_1, b_2]\}$.
Laat P_Z en P_W de maten zijn, gegenereerd op $C([a_1, a_2] \times [b_1, b_2])$ door de sheets Z en W, respectievelijk. Dan geldt voor de Radon-Nikodym afgeleide van P_Z t.o.v. P_W:

Stelling 3.2 *Als* g *absoluut continu is en* $\partial_1 \partial_2 g \in \mathcal{L}^2([a_1, a_2] \times [b_1, b_2])$, *dan zijn de maten* P_Z *en* P_W *equivalent en de Radon-Nikodym afgeleide van* P_Z *t.o.v.* P_W *is gelijk aan*

$$\frac{dP_Z}{dP_W}(Z) = \exp\left\{-\frac{1}{2}(Am^2 - 2\zeta m)\right\},$$

waar

$$\begin{aligned} A &= \frac{g^2(a_1, b_1)}{a_1 b_1} + \int_{a_1}^{a_2} \frac{[\partial_1 g(u, b_1)]^2}{b_1} du + \int_{b_1}^{b_2} \frac{[\partial_2 g(a_1, v)]^2}{a_1} dv \\ &\quad + \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} [\partial_1 \partial_2 g(u,v)]^2 du dv; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\zeta &= \frac{g(a_1,b_1)Z(a_1,b_1)}{a_1b_1} + \int_{a_1}^{a_2} \frac{\partial_1 g(u,b_1)}{b_1} Z(du,b_1) + \int_{b_1}^{b_2} \frac{\partial_2 g(a_1,v)}{a_1} Z(a_1,dv) \\ &\quad + \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} \partial_1\partial_2 g(u,v) Z(du,dv).\end{aligned}$$

De meest aannemelijke schatter van m gebaseerd op de observaties $\{Z(s,t) : s \in [a_1,a_2], t \in [b_1,b_2]\}$ heeft de vorm $\tilde{m} = \zeta/A$ en is normaal verdeeld met verwachtingswaarde m en variantie $1/A$.

Bewijs Zie [2].

3.3 Wong en Zakai

Vervolgens kijken we naar het artikel van E. Wong en M. Zakai. Hierin proberen de auteurs expliciete uitdrukkingen te vinden voor aannemelijkheidsverhoudingen (likelihoodratio's). Meer over aannemelijkheidsverhoudingen is te lezen in Appendix A. In de laatste paragraaf echter wordt gekeken naar sheets van de vorm

$$X(z) = \int_{R_z} \theta(\zeta)d\zeta + W(z), \quad z \in R_{z_0}, \tag{1}$$

waar θ een random sheet is en W een Wienersheet.
X, θ en W zijn gedefinieerd op een kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$. Vervolgens wordt op $(\Omega, \mathcal{F})$ een kansmaat $\mathcal{P}_0$ gedefinieerd zó dat X t.o.v. deze maat zelf een Wienersheet is.

Stelling 3.3 *Zij $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ een kansruimte en zij $\{\mathcal{F}_z, z \in R_{z_0}\}$ een collectie σ-algebra's zó dat $\theta(z)$ $\mathcal{F}_z$-meetbaar is voor elke z. Verder zij $\{W(z), \mathcal{F}_z : z \in R_{z_0}\}$ een Wienersheet is.*
Definieer

$$V_z = \exp\left\{-\int_{R_z} \theta(\zeta)dW(\zeta) - \frac{1}{2}\int_{R_z} \theta(\zeta)^2 d\zeta\right\}.$$

Definieer nu de maat $\mathcal{P}_0$ door

$$\frac{d\mathcal{P}_0}{d\mathcal{P}} = V_{z_0}.$$

Dan
(a) $\mathcal{P}_0$ is een kansmaat;
(b) X is een Wienersheet onder $\mathcal{P}_0$;
(c) $\mathcal{P}_0 \sim \mathcal{P}$ en

$$\frac{d\mathcal{P}}{d\mathcal{P}_0} = \exp\left\{\int_{R_{z_0}} \theta(\zeta)dX(\zeta) - \frac{1}{2}\int_{R_{z_0}} \theta(\zeta)^2 d\zeta\right\}.$$

Bewijs Zie [4].

Opmerking: De definitie van $\mathcal{P}_0$ betekent: $\mathcal{P}_0(F) = \int_F V_{z_0}(\omega)d\mathcal{P}(\omega), \quad F \sqsubseteq \mathfrak{F}$.

We hebben nu een uitdrukking voor $\frac{d\mathcal{P}}{d\mathcal{P}_0}$, maar we willen graag een uitdrukking voor $\frac{dP_X}{dP_W}(X)$. Dit is echter geen probleem.

Stelling 3.4 *Laat P_X en P_W de maten zijn, gegenereerd op $C(R_{z_0})$ door X en W, respectievelijk. Dan*

$$\frac{d\mathcal{P}}{d\mathcal{P}_0} = \frac{dP_X}{dP_W}(X).$$

Bewijs: Merk op $\frac{d\mathcal{P}}{d\mathcal{P}_0} : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}^+$ en $\frac{dP_X}{dP_W} : C(R_{z_0}) \to \overline{\mathbb{R}}^+$.

We construeren $\mathcal{B}_{C(R_{z_0})}$ op dezelfde manier als $\mathcal{B}_{C([a_1,a_2])}$ in lemma 2.13.

Voor $B \sqsubseteq \mathcal{B}_{C(\mathcal{R}_{z_0})}$ geldt $\mathcal{P}(X^{-1}(B)) = P_X(B)$.
X is een Wienersheet onder $\mathcal{P}_0$, dus $\mathcal{P}_0(X^{-1}(B)) = P_W(B)$.
Dan

$$\mathcal{P}(X^{-1}(B)) = P_X(B) = \int_B \frac{dP_X}{dP_W}(x)dP_W(x) = \int_{X^{-1}(B)} \frac{dP_X}{dP_W} \circ X(y)d\mathcal{P}_0(y).$$

Dus $\frac{d\mathcal{P}}{d\mathcal{P}_0} = \frac{dP_X}{dP_W} \circ X$. □

Nu weer terug naar de sheet

$$Z(s,t) := W(s,t) + mg(s,t), \quad (s,t) \in [a_1,a_2] \times [b_1,b_2].$$

Ook hier hebben we geen nul-start in (a_1,b_1), dus gebruiken we net als bij de processen

$$\frac{dP_Z}{dP_W}(Z) = \frac{dP_{Z(a_1,b_1)}}{dP_{W(a_1,b_1)}}(Z(a_1,b_1))\frac{dP_{Z-Z(a_1,b_1)}}{dP_{W-W(a_1,b_1)}}(Z - Z(a_1,b_1)).$$

Dit volgt weer uit stelling 2.10 en 2.12.

Er geldt $Z(s,t) \sim \mathcal{N}(mg(s,t), st)$, dus

$$\begin{aligned}\frac{dP_{Z(a_1,b_1)}}{dP_{W(a_1,b_1)}}(Z(a_1,b_1)) &= \frac{f_{Z(a_1,b_1)}}{f_{W(a_1,b_1)}}(Z(a_1,b_1)) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi a_1 b_1}}\exp\left\{-\frac{(Z(a_1,b_1)-mg(a_1,b_1))^2}{2a_1b_1}\right\}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi a_1 b_1}}\exp\left\{-\frac{Z(a_1,b_1)^2}{2a_1b_1}\right\}} \\ &= \exp\left\{\frac{2mg(a_1,b_1)Z(a_1,b_1) - m^2g^2(a_1,b_1)}{2a_1b_1}\right\}.\end{aligned}$$

Als $g - g(a_1, b_1)$ te schrijven als integraal, zoals in (1), dan kunnen we voor de berekening van $\frac{dP_{Z-Z(a_1,b_1)}}{dP_{W-W(a_1,b_1)}}(Z - Z(a_1, b_1))$ stelling 3.3 toepassen.

Neem aan voor $(s,t) \in [a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$:

$$m(g(s,t) - g(a_1, b_1)) := \int_{b_1}^{t} \int_{a_1}^{s} \theta(u,v) du dv \quad \text{met } \theta \in \mathcal{L}^2([a_1, a_2] \times [b_1, b_2])$$

Dan

$$\partial_1 g(s,t) = \frac{1}{m} \int_{b_1}^{t} \theta(s,v) dv \quad \text{en} \quad \partial_2 g(s,t) = \frac{1}{m} \int_{a_1}^{s} \theta(u,t) du.$$

Dus

$$\partial_1 g(s, b_1) = \frac{1}{m} \int_{b_1}^{b_1} \theta(s,v) dv = 0;$$

$$\partial_2 g(a_1, t) = \frac{1}{m} \int_{a_1}^{a_1} \theta(u,t) du = 0.$$

Voor de dubbele afgeleide hebben we $\partial_1 \partial_2 g(s,t) = \frac{1}{m} \theta(s,t)$, dus $\theta(s,t) = m \partial_1 \partial_2 g(s,t)$.

Helaas kunnen we stelling 3.2 niet voor alle g bewijzen. Daarom vereenvoudigen we de stelling tot:

Stelling 3.5 *Laat g een functie zijn op $[a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$ zó dat $g(s,t) - g(a_1, b_1) = \frac{1}{m} \int_{b_1}^{t} \int_{a_1}^{s} \theta(u,v) du dv$ met $\theta \in \mathcal{L}^2([a_1, a_2] \times [b_1, b_2])$.*
Dan zijn de maten P_Z en P_W equivalent en de Radon-Nikodym afgeleide van P_Z t.o.v. P_W is gelijk aan

$$\frac{dP_Z}{dP_W}(Z) = \exp\left\{ -\frac{1}{2}(Am^2 - 2\zeta m) \right\},$$

waar

$$\begin{aligned} A &= \frac{g^2(a_1, b_1)}{a_1 b_1} + \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} [\partial_1 \partial_2 g(u,v)]^2 du dv; \\ \zeta &= \frac{g(a_1, b_1) Z(a_1, b_1)}{a_1 b_1} + \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} \partial_1 \partial_2 g(u,v) Z(du, dv). \end{aligned}$$

Bewijs: g is continu en differentieerbaar en $\partial_1 \partial_2 g \in \mathcal{L}^2([a_1, a_2] \times [b_1, b_2])$.
Definieer voor een vast punt $z_0 \succ (a_1, b_1)$ $\quad \tilde{R}_{z_0} := \{z : (a_1, b_1) \prec z \preceq z_0\}$.
Laat $\tilde{R} := \tilde{R}_{(a_2, b_2)}$.
Omdat we nu op $\tilde{R}$ werken moeten we $\mathcal{P}_0$ iets anders kiezen.
Laat daarom $\tilde{V}_z := \exp\left\{ -\int_{\tilde{R}_z} \theta(\zeta) dW(\zeta) - \frac{1}{2} \int_{\tilde{R}_z} \theta(\zeta)^2 d\zeta \right\}$ en definieer $\tilde{\mathcal{P}_0}$ door: $\frac{d\tilde{\mathcal{P}}_0}{d\mathcal{P}} = \tilde{V}_{(a_2, b_2)}$.

Dan is $\tilde{\mathcal{P}}_0$ een kansmaat en $Z - Z(a_1, b_1)$ is een Wienersheet onder $\tilde{\mathcal{P}}_0$. Verder geldt $\tilde{\mathcal{P}} \sim \tilde{\mathcal{P}}_0$ en

$$\frac{dP_{Z-Z(a_1,b_1)}}{dP_{W-W(a_1,b_1)}}(Z - Z(a_1,b_1)) = \frac{d\mathcal{P}}{d\tilde{\mathcal{P}}_0} = \exp\left\{\int_{\tilde{R}} \theta(\zeta)dZ(\zeta) - \frac{1}{2}\int_{\tilde{R}} \theta(\zeta)^2 d\zeta\right\}$$
$$= \exp\left\{m\int_{a_1}^{a_2}\int_{b_1}^{b_2} \partial_1\partial_2 g(u,v)Z(du,dv) - \frac{1}{2}m^2\int_{a_1}^{a_2}\int_{b_1}^{b_2}[\partial_1\partial_2 g(u,v)]^2 du dv\right\}.$$

Dus

$$\begin{aligned}
\frac{dP_Z}{dP_W}(Z) &= \frac{dP_{Z(a_1,b_1)}}{dP_{W(a_1,b_1)}}(Z(a_1,b_1))\frac{dP_{Z-Z(a_1,b_1)}}{dP_{W-W(a_1,b_1)}}(Z - Z(a_1,b_1)) \\
&= \exp\left\{\frac{2mg(a_1,b_1)Z(a_1,b_1) - m^2g^2(a_1,b_1)}{2a_1b_1}\right\} \cdot \\
&\quad \exp\left\{m\int_{a_1}^{a_2}\int_{b_1}^{b_2} \partial_1\partial_2 g(u,v)Z(du,dv) - \frac{1}{2}m^2\int_{a_1}^{a_2}\int_{b_1}^{b_2}[\partial_1\partial_2 g(u,v)]^2 du dv\right\} \\
&= \exp\left\{-\frac{1}{2}(Am^2 - 2\zeta m)\right\}.
\end{aligned}$$

met A en ζ als hiervoor. $\square$

A Appendix

Martingalen

Bij de definitie van zowel Wienerprocessen als Wienersheets hebben we in deze scriptie gebruik gemaakt van het begrip martingaal. Daarom heel kort iets hierover.

Zij $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ een kansruimte, $\mathcal{G}$ een σ-algebra, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, en ξ een stochast op $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$.

Definitie A.1 *(1)De **voorwaardelijke verwachting** van een niet-negatieve stochast ξ ten opzichte van de σ-algebra $\mathcal{G}$ is een stochast met waarden in $[0, \infty]$, genoteerd als $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{G}]$, zó dat*
(a) $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{G}]$ is $\mathcal{G}$-meetbaar;
(b) voor elke $G \in \mathcal{G}$

$$\int_G \xi d\mathcal{P} = \int_G \mathbb{E}[\xi|\mathcal{G}] d\mathcal{P}.$$

(2)De voorwaardelijke verwachting $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{G}]$ van een stochast ξ t.o.v. de σ-algebra $\mathcal{G}$ is gedefinieerd zodra $min(\mathbb{E}[\xi^+|\mathcal{G}], \mathbb{E}[\xi^-|\mathcal{G}]) < \infty \quad \mathcal{P} - b.o.$ Er geldt:

$$\mathbb{E}[\xi|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[\xi^+|\mathcal{G}] - \mathbb{E}[\xi^-|\mathcal{G}]$$

waar op de verzameling (met maat nul) punten waarvoor $\mathbb{E}[\xi^+|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[\xi^-|\mathcal{G}] = \infty$, het verschil $\mathbb{E}[\xi^+|\mathcal{G}] - \mathbb{E}[\xi^-|\mathcal{G}]$ een willekeurige waarde krijgt, bijvoorbeeld 0.

De functie

$$\mathcal{Q}(G) = \int_G \xi d\mathcal{P}, \quad G \sqsubseteq \mathcal{G},$$

definieert een maat op $(\Omega, \mathcal{G})$ en $\mathcal{Q} \ll \mathcal{P}$.
Dus is er een stochast $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{G}]$ met waarden in $[0, \infty]$ zo dat

$$\mathcal{Q}(G) = \int_G \mathbb{E}[\xi|\mathcal{G}] d\mathcal{P}.$$

Opmerking 1. De voorwaardelijk verwachting $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{G}]$ is uniek met uitzondering van $\mathcal{P}$-nul-verzamelingen. Dus voor $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{G}]$ kunnen we iedere $\mathcal{G}$-meetbare functie f nemen waarvoor $\mathcal{Q}(G) = \int_G f d\mathcal{P}, \quad G \sqsubseteq \mathcal{G}$.
Dus $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{G}] := \frac{d\mathcal{Q}}{d\mathcal{P}}$.

Opmerking 2. In het algemeen kunnen we niet zeggen dat $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{G}] = \xi$, omdat ξ niet noodzakelijk $\mathcal{G}$-meetbaar is.

Definitie A.2 *Een stochastisch proces* $\xi = \{\xi(t), \mathcal{F}_t : t \geq 0\}$ *is een* ***martingaal*** *als* $\mathbb{E}[|\xi(t)|] < \infty$ *voor alle* $t \geq 0$ *en als* $(\mathcal{P} - b.o.)$ $\mathbb{E}[\xi(t)|\mathcal{F}_t] = \xi(s), \quad 0 \leq s \leq t.$

Ook een sheet kan een martingaal zijn. Voor de definitie hiervan kijken we naar het artikel van E. Wong en M. Zakai [4].

Voor elke $z \in R_{z_0}$ noteren we $\mathcal{F}_z^1$ voor $\mathcal{F}_{z \otimes z_0}$ en $\mathcal{F}_z^2$ voor $\mathcal{F}_{z_0 \otimes z}$.

Zij $\{X(z), \mathcal{F}_z : z \in R_{z_0}\}$ een sheet op $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$.
Voor $b \succ a$ is $(a, b]$ de rechthoek $\{z : a \prec z \preceq b\}$ en $X(a, b]$ is het increment $X(b) - X(a \otimes b) - X(b \otimes a) + X(a)$.

Definitie A.3 $\{X(z), \mathcal{F}_z : z \in R_{z_0}\}$ *is een* ***martingaal*** *als* $\mathbb{E}[|X(z)|] < \infty$ *voor alle* $z \in R_{z_0}$ *en als voor* $z' \succ z$ *geldt* $\mathbb{E}[X(z')|\mathcal{F}_z] = X(z) \quad (\mathcal{P} - b.o.)$.

Definitie A.4 $\{X(z), \mathcal{F}_z : z \in R_{z_0}\}$ *is een* ***sterke martingaal*** *als* $\mathbb{E}[X(z, z']|\mathcal{F}_z^1 \cup \mathcal{F}_z^2] = 0$.

Meest Aannemelijke Schatters

In stelling 2.2 en 3.2 worden Radon-Nikodym afgeleiden berekend en daaruit wordt de meest aannemelijke schatter bepaald. Wat de meest aannemelijke schatter van een stochast is, is onder andere te lezen in het boek MATHEMATICAL STATISTICS, AN INTRODUCTION van W.R. Pestman [7]. Hieronder een korte samenvatting daarvan.

Zij Θ een parameterruimte en $X_1, \ldots, X_n$ een steekproef uit een populatie met kansdichtheid $f(\bullet, \theta)$, met $\theta \in \Theta$. De **aannemelijkheidsfunctie** $L_\theta : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ wordt gedefinieerd door

$$L_\theta(x_1, \ldots, x_n) := f(x_1, \theta) \cdots f(x_n, \theta), \quad (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Als $(x_1, \ldots, x_n)$ de realisatie is van de steekproef $X_1, \ldots, X_n$, dan kiezen we in Θ een element $\hat{\theta}$ dat de functie

$$\theta \mapsto L_\theta(x_1, \ldots, x_n)$$

maximaliseert. We nemen aan dat er, gegeven $(x_1, \ldots, x_n)$, precies één zo'n $\hat{\theta}$ in Θ is. Deze $\hat{\theta}$ noemen we de **meest aannemelijke schatter** van θ.
Voor een willekeurige statistiek $\kappa : \Theta \to \mathbb{R}$ definiëren we de meest aannemelijke schatter van κ door $\kappa\Big(\hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)\Big)$.

Zij $(X_1, \ldots, X_n; H_0, H_1; G)$ een hypothesetoets met enkelvoudige hypothesen

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{en} \quad H_1 : \theta = \theta_1, \quad (\theta_0 \neq \theta_1).$$

We noteren $L_0 := L_{\theta_0}$ en $L_1 := L_{\theta_1}$.

Stelling A.5 (Neyman-Pearson lemma) *Stel de hypothese $H_0 : \theta = \theta_0$ wordt getoetst tegen $H_1 : \theta = \theta_1$. Laat α het significantieniveau zijn. Zij G het kritieke gebied, gedefinieerd door*

$$G(c) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \frac{L_0(x)}{L_1(x)} \leq c \right\} \quad (c > 0)$$

en laat α de omvang ervan zijn. Dan geldt voor elk ander kritiek gebied van omvang α, dat het onderscheidend vermogen kleiner dan of gelijk is aan dat van G.

Bewijs Zie [7].

De uitdrukking $\frac{L_0}{L_1}$ noemen we de **aannemelijkheidsverhouding** (likelihood ratio). Als $\frac{L_0}{L_1}(x_1, \ldots, x_n) \leq c$, dan verwerpen we H_0.

Vervolgens kunnen we dit uitbreiden tot samengestelde hypothesen. We nemen aan dat H_0 en H_1 hypothesen zijn van de vorm

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \quad \text{en} \quad H_1 : \theta \in \Theta_1,$$

waar Θ_0 en Θ_1 disjuncte deelverzamelingen van Θ zijn, zó dat $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$.

Definitie A.6 *De **aannemelijkheidsverhouding** in het geval van samengestelde hypothesen, wordt gedefinieerd door*

$$\Lambda(x_1, \dots, x_n) := \frac{\sup\limits_{\theta \in \Theta_0} L_\theta(x_1, \dots, x_n)}{\sup\limits_{\theta \in \Theta_1} L_\theta(x_1, \dots, x_n)}.$$

De aannemelijkheidsverhouding bestaat voor alle elementen $(x_1, \dots, x_n)$ uit de verzameling

$$D_\Lambda = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sup_{\theta \in \Theta_1} L_\theta(x_1, \dots, x_n) \neq 0 \right\}.$$

Voor $c \in [0, 1]$ definiëren we een gebied $G(c)$ door

$$G(c) := \{(x_1, \dots, x_n) \in D_\Lambda : \Lambda(x_1, \dots, x_n) \leq c\}.$$

Meestal proberen we c zo te kiezen dat de omvang van $G(c)$ gelijk is aan α.

Als nu bijvoorbeeld Θ_0 enkelvoudig is, zeg $\Theta_0 = \{\theta_0\}$, dan

$$\begin{aligned} \Lambda(x_1, \dots, x_n) &= \frac{L_{\theta_0}(x_1, \dots, x_n)}{\sup\limits_{\theta \in \Theta_1} L_\theta(x_1, \dots, x_n)} = \inf_{\theta \in \Theta_1} \frac{f(x_1, \theta_0) \dots f(x_n, \theta_0)}{f(x_1, \theta) \dots f(x_n, \theta)} \\ &= \inf_{\theta \in \Theta_1} \frac{dP^{\theta_0}_{X_1, \dots, X_n}}{dP^{\theta}_{X_1, \dots, X_n}}(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Als $\Lambda(x_1 \dots, x_n) \leq c$, dan verwerpen we H_0. De meest aannemelijke schatter $\hat{\theta}$ is dan de $\theta \in \Theta_1$ die $\frac{dP^{\theta_0}_{X_1, \dots, X_n}}{dP^{\theta}_{X_1, \dots, X_n}}(x_1, \dots, x_n)$ minimaliseert.

Voorbeeld: We willen m schatten op basis van de uitkomst van $Z(a_1) = W(a_1) + mg(a_1)$. Laat z deze uitkomst zijn. We toetsen H_0 tegen H_1, waar

$$\begin{aligned} H_0 &: \; m \neq 0 \\ H_1 &: \; m = 0 \quad (Z(a_1) = W(a_1)). \end{aligned}$$

Dan

$$\Lambda(z) = \sup_{m \neq 0} \frac{L_m(z)}{L_0(z)} = \sup_{m \neq 0} \frac{f_m(z)}{f_0(z)} = \sup_{m \neq 0} \frac{dP_{Z(a_1)}}{dP_{W(a_1)}}(z) = \sup_{m \neq 0} \exp\left\{ \frac{2mg(a_1)z - m^2 g^2(a_1)}{2a_1} \right\}.$$

Differentiëren naar m en gelijk stellen aan 0 levert:

$$\begin{array}{ll} & \exp\left\{\frac{2mg(a_1)z-m^2g^2(a_1)}{2a_1}\right\}\left(\frac{1}{2a_1}(2g(a_1)z-2mg^2(a_1))\right)=0 \\ \Longrightarrow & z-mg(a_1)=0 \\ \Longrightarrow & m=\frac{z}{g(a_1)}. \end{array}$$

Dus de meest aannemelijke schatter $\tilde{m}$ van m is $\frac{Z(a_1)}{g(a_1)}$.

Voor stochastische processen gaat dit allemaal niet op omdat we geen kansdichtheidsfuncties hebben. Uit het artikel van Wong en Zakai halen we het volgende.

Zij $\{X(t) : 0 \leq t \leq 1\}$, een standaard Wienerproces gedefinieerd op een kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}_0)$. Zij $\mathcal{P}$ een kansmaat op $(\Omega, \mathcal{F})$ equivalent met $\mathcal{P}_0$. $\mathbb{E}$ en $\mathbb{E}_0$ zijn de verwachtingen gerelateerd aan $\mathcal{P}$ en $\mathcal{P}_0$, respectievelijk. We noteren $\sigma(X(s), 0 \leq s \leq t)$ met $\mathcal{F}_t^X$.

Neem aan $\frac{d\mathcal{P}}{d\mathcal{P}_0} = \exp\{\int_0^1 \phi(s)dX(s) - \frac{1}{2}\int_0^1 \phi(s)^2 ds\}$ met $\{\phi(t), \mathcal{F}_t : 0 \leq t \leq 1\}$ een stochastisch proces. Onder bepaalde voorwaarden zoals $\int_0^1 \mathbb{E}\phi(s)^2 ds < \infty$, is de aannemelijkheidsverhouding te schrijven als

$$\Lambda_t := \mathbb{E}_0\left[\frac{d\mathcal{P}}{d\mathcal{P}_0}\middle|\mathcal{F}_t^X\right] = \exp\left\{\int_0^t \hat{\phi}(s)dX(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \hat{\phi}(s)^2 ds\right\},$$

waar $\hat{\phi}(t) = \mathbb{E}[\phi(t)|\mathcal{F}_t^X]$.
Dit zien we terug in stelling 2.8.

Ook als X een sheet is op R_{z_0} van de vorm

$$X(z) = \int_{R_z} \theta(\zeta)d\zeta + W(z), \quad z \in R_{z_0}$$

bestaat er een uitdrukking voor de aannemelijkheidsverhouding. Namelijk

$$\begin{aligned} \Lambda_z &:= \mathbb{E}_0\left[\frac{d\mathcal{P}}{d\mathcal{P}_0}\middle|\mathcal{F}_z^X\right] \\ &= \exp\left\{\int_{R_z} \hat{\theta}(\zeta|\zeta)dX(\zeta) - \frac{1}{2}\int_{R_z} \hat{\theta}^2(\zeta|\zeta)d\zeta - \frac{1}{2}\int_{R_z\times R_z} R^2(\zeta,\zeta'|\zeta'\otimes\zeta)d\zeta d\zeta'\right. \\ &+ \left.\int_{R_z\times R_z} R(\zeta,\zeta'|\zeta'\otimes\zeta)[dX_\zeta - \hat{\theta}(\zeta|\zeta'\otimes\zeta)d\zeta][dX(\zeta') - \hat{\theta}(\zeta'|\zeta'\otimes\zeta)d\zeta']\right\}, \end{aligned}$$

waar

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(\zeta|z) &= \mathbb{E}\left[\theta(\zeta)|\mathcal{F}_z^X\right] \\ R(\zeta,\zeta'|z) &= \mathbb{E}\left[(\theta(\zeta)-\hat{\theta}(\zeta|z))(\theta(\zeta')-\hat{\theta}(\zeta'|z))\right]. \end{aligned}$$

Gelukkig hadden we in ons geval voor θ een niet-stochastische functie. Daardoor werden de laatste twee integralen gelijk aan 0 en zag het geheel er heel fatsoenlijk uit.

Referenties

[1] A. van Rooij en J. Smit. *Maat en Integraal*, Collegedictaat Katholieke Universiteit Nijmegen, 1992

[2] Sándor Baran, Gyula Pap, Martien C. A. van Zuijlen. *Estimation of the mean of stationary and nonstationary Ornstein-Uhlenbeck processes and sheets*, Department of Mathematics, University of Nijmegen, Report No. 0003, February 2000

[3] R.S. Liptser en A.N. Shiryayev. *Statistics of Random Processes I, General Theory*, Springer-Verlag, New York, 1977

[4] Eugene Wong en Moshe Zakai. *Likelihood Ratios and Transformation of Probability Associated with Two-Parameter Wiener Processes*, Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete 40, 283-308 1977

[5] A.N. Shiryayev. *Probability*, Springer-Verlag New York Inc., 1984

[6] T. Hida. *Brownian Motion*, Springer-Verlag New York, 1980

[7] Wiebe R. Pestman. *Mathematical Statistics, An Introduction*, Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1998